数理解析研究所講究録
1500巻 2006年 57-68

Universal Yang–Mills Action on Four Dimensional Manifolds

by

横浜市大・数理科学科 藤井一幸 (FUJII Kazuyuki)
Department of Mathematical Sciences, Yokohama City University、

大池宏清 (OIKE Hiroshi)
山形市 高堂 85–5、

早稲田大・理工学部 鈴木達夫 (SUZUKI Tatsuo)
School of Science and Engineering, Waseda University

概 要

4次元多様体 M とその上の principal G–bundle P が与えられたとき、Yang–Mills action はその curvature(s) の2次形式で与えられる。その意味は $G=U(1)$ のとき、運動方程式及び Bianchi の恒等式で Maxwell 方程式系 が再現されるからである。

Born と Infeld は、Maxwell 方程式系の非線形拡張を与えており、それを与える Born–Infeld action が知られている。最近これの非アーベル版が、M–theory との関係で注目を集めている。

荒く言えば、Born–Infeld action は 幾何学の Chern theory に於ける Chern class に対応するものである。ところで Chern theory にはそれ以外に Chern character もある。我々はこの Chern character に対応する Yang–Mills action の非線形拡張を提出し、それを **universal Yang–Mills action** と呼ぶ。

我々の action は、Born–Infeld のそれに対して一つの advantage をもつ。それは action が instanton 方向と anti–instanton 方向に完全にスプリットするのである。即ち、汎関数的な変数分離が起こったことになる。理論の量子化を考えるときに更なる advantage をもつかもしれない。

更に我々の方法は、最近精力的に研究されている non–commutative Yang–Mills theory に応用できるが、今それを遂行するだけの時間的余裕がない。

1 数学的準備

初めに数学的準備をしよう。対象は全て C^∞–category で考えることにする。即ち、C^∞–manifold 、C^∞–map 等である。これで十分である。以下の内容に関しては中原 [1] を参照せよ。

M を4次元多様体、G を古典リー群（但し、ここでは $U(1)$ 及び $SU(2)$ のみを扱う）とする。$\{G, P, \pi, M\}$ を M 上の principal G bundle とする ：

$$\pi : P \longrightarrow M, \quad \pi^{-1}(m) \cong G.$$

このバンドルに対して connection を考える。局所的に考えれば十分であるから、g を群 G のリー環とし、U を M の開集合とすると connection $\{A_\mu\}$ $(\mu = 1 \sim 4)$ は

$$A_\mu : U \longrightarrow g$$

で与えられる。これから得られる curvature $\{F_{\mu\nu}\}$ $(\mu, \nu = 1 \sim 4)$ は

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + [A_\mu, A_\nu] \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

となる。このとき

$$F_{\mu\nu} : U \longrightarrow g, \qquad F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu} \; (\Longrightarrow \; F_{\mu\mu} = 0)$$

に注意すること。

map $\phi : U \longrightarrow G$ に対して, ϕ による A の gauge transformation は

$$A_\mu \longrightarrow \phi^{-1} A_\mu \phi + \phi^{-1} \partial_\mu \phi$$

と定義され、このもとで curvature F は

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \phi^{-1} F_{\mu\nu} \phi$$

と変換される。

2 Universal Yang–Mills Action : Abelian Case

この章では $G = U(1)$ を取り扱う。この場合が prototype になる。まず curvature 行列 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

で定義しよう。

[I] Abelian Yang–Mills action $\mathcal{A}_{YM}$ [1] [2]

[1] これはむしろ Maxwell action と呼んだほうが適切かもしれない

この action は

$$\mathcal{A}_{YM} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(g\mathcal{F})^2 = -g^2 \sum_{i<j} F_{ij}^2 \tag{2}$$

で与えられる。ここに g は coupling constant である。

このモデルは非常に有名なもので (どんな教科書にも出てくる) ここでこれ以上付け加えることはない。例えば、[3], [4] を見よ。

[II] Born–Infeld action $\mathcal{A}_{BI}$ [5]

[I] の abelian Yang–Mills action の非線形拡張は、Born と Infeld によって既に知られている。その action は

$$\mathcal{A}_{BI} \equiv \sqrt{\det\left(\mathbf{1}_4 + g\mathcal{F}\right)} \tag{3}$$

で与えられる。ここに g は coupling constant である。

このモデルも相当に有名なもので非常に多くの論文が出ている。ここではこれ以上コメントしない。

[III] Our action $\mathcal{A}_{FOS}$ [6]

我々は、Born–Infeld action に対して少しばかり不満を持っているので別の非線形拡張を提出する。その action は

$$\mathcal{A}_{FOS} \equiv \mathrm{tr}\ \mathrm{e}^{g\mathcal{F}} \tag{4}$$

で与える。ここに g は coupling constant である。我々はこれを universal Yang–Mills action と呼ぶことにする (その理由は後に明らかになる)。

(4) の右辺を計算しよう。そのためにまず $g\mathcal{F}$ の固有方程式 (多項式) をもとめる。

$$\begin{aligned}
0 &= |\lambda \mathbf{1}_4 - g\mathcal{F}| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & -gF_{12} & -gF_{13} & -gF_{14} \\ gF_{12} & \lambda & -gF_{23} & -gF_{24} \\ gF_{13} & gF_{23} & \lambda & -gF_{34} \\ gF_{14} & gF_{24} & gF_{34} & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^4 + g^2\left(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2\right)\lambda^2 + g^4\left(F_{12}F_{34} - F_{13}F_{24} + F_{14}F_{23}\right)^2 .
\end{aligned} \tag{5}$$

4次方程式なので $t = \lambda^2$ とおくと、2次方程式

$$t^2 + g^2\left(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2\right)t + g^4\left(F_{12}F_{34} - F_{13}F_{24} + F_{14}F_{23}\right)^2 = 0$$

に帰着する。

この方程式を解くために判別式を求めよう。

$$
\begin{aligned}
D &= g^4\left(F_{12}^2+F_{13}^2+F_{14}^2+F_{23}^2+F_{24}^2+F_{34}^2\right)^2-4g^4\left(F_{12}F_{34}-F_{13}F_{24}+F_{14}F_{23}\right)^2\\
&= g^4\left\{F_{12}^2+F_{13}^2+F_{14}^2+F_{23}^2+F_{24}^2+F_{34}^2-2(F_{12}F_{34}-F_{13}F_{24}+F_{14}F_{23})\right\}\times\\
&\quad\ \left\{F_{12}^2+F_{13}^2+F_{14}^2+F_{23}^2+F_{24}^2+F_{34}^2+2(F_{12}F_{34}-F_{13}F_{24}+F_{14}F_{23})\right\}\\
&= g^4\left\{(F_{12}-F_{34})^2+(F_{13}+F_{24})^2+(F_{14}-F_{23})^2\right\}\times\\
&\quad\ \left\{(F_{12}+F_{34})^2+(F_{13}-F_{24})^2+(F_{14}+F_{23})^2\right\}.
\end{aligned}
$$

そこで簡単のため

$$
\begin{aligned}
X_{sd}^2 &= (F_{12}-F_{34})^2+(F_{13}+F_{24})^2+(F_{14}-F_{23})^2, &(6)\\
X_{asd}^2 &= (F_{12}+F_{34})^2+(F_{13}-F_{24})^2+(F_{14}+F_{23})^2 &(7)
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
D=g^4X_{sd}^2X_{asd}^2
$$

となる。容易に

$$
\begin{aligned}
X_{asd}^2+X_{sd}^2 &= 2\left(F_{12}^2+F_{13}^2+F_{14}^2+F_{23}^2+F_{24}^2+F_{34}^2\right),\\
X_{asd}^2-X_{sd}^2 &= 4\left(F_{12}F_{34}-F_{13}F_{24}+F_{14}F_{23}\right)
\end{aligned}
$$

がわかり、２次方程式は

$$
t^2+g^2\frac{X_{sd}^2+X_{asd}^2}{2}t+g^4\frac{(X_{asd}^2-X_{asd}^2)^2}{16}=0
$$

となる。これは簡単に解けて

$$
\begin{aligned}
t_\pm &= g^2\left\{-\frac{X_{sd}^2+X_{asd}^2}{4}\pm\frac{X_{sd}X_{asd}}{2}\right\}\\
&= \frac{g^2}{4}\left\{-(X_{sd}^2+X_{asd}^2)\pm 2X_{sd}X_{asd}\right\}\\
&= -\frac{g^2}{4}\left\{(X_{sd}^2+X_{asd}^2)\mp 2X_{sd}X_{asd}\right\}\\
&= -\frac{g^2}{4}\left(X_{sd}\mp X_{asd}\right)^2
\end{aligned}
$$

で、$\lambda^2=t$ だったから

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= i\frac{g}{2}(X_{sd}+X_{asd}),\quad \lambda_2=-i\frac{g}{2}(X_{sd}+X_{asd}),\\
\lambda_3 &= i\frac{g}{2}(X_{sd}-X_{asd}),\quad \lambda_4=-i\frac{g}{2}(X_{sd}-X_{asd}) &(8)
\end{aligned}
$$

となる。

以上のことから

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{FOS} &\equiv \mathrm{tr}\ \mathrm{e}^{g\mathcal{F}} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_1} + \mathrm{e}^{\lambda_2} + \mathrm{e}^{\lambda_4} + \mathrm{e}^{\lambda_4} \\
&= 2\cos\left(g\frac{X_{sd}+X_{asd}}{2}\right) + 2\cos\left(g\frac{X_{sd}-X_{asd}}{2}\right) \\
&= 4\cos\left(g\frac{X_{sd}}{2}\right)\cos\left(g\frac{X_{asd}}{2}\right) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

を得る。

まず

$$
\begin{aligned}
X_{sd} &= 0 \Longleftrightarrow F_{12}=F_{34},\ F_{13}=-F_{24},\ F_{14}=F_{23} \Longleftrightarrow \{F_{ij}\} : \textbf{self–dual}, \qquad (10) \\
X_{asd} &= 0 \Longleftrightarrow F_{12}=-F_{34},\ F_{13}=F_{24},\ F_{14}=-F_{23} \Longleftrightarrow \{F_{ij}\} : \textbf{anti–self–dual} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

に注意すること。self–dual 及び anti–self–dual 方程式が自動的に出てくる。

このモデルの特徴は、action が self–dual 及び anti–self–dual 方向に完全にスプリットすることである。ある意味で、汎関数的変数分離が行われたことになる。通常の Yang–Mills action や Born–Infeld action では予想だに出来ず、驚くべきことである。我々の action は curvature matrix $\mathcal{F}$ の "全て" の情報を取り出しているのである。このことが universal Yang–Mills action と呼んだ理由である。

将来このモデルの経路積分による量子化を考えるとき、汎関数的変数分離のため 分配関数 (partition function)

$$
\mathcal{P}(g) \equiv \frac{1}{\mathcal{N}}\int \prod_{\mu=1}^{4}[\mathcal{D}A_\mu]\int_M \mathcal{A}_{FOS}(A_1,A_2,A_3,A_4)\ dv_M
$$

の計算を容易にするかも知れない。ここに $\mathcal{N}$ は normalization constant である。

ところでこの action の背後には何があるのか？　実は、良く知られたリー環の同型

$$
so(4) \ \cong\ su(2)\otimes su(2) \qquad (12)
$$

が潜んでいるのである ([7] を見よ)。逆に言えば (12) の一つの realization が我々の action (9) なのである。右辺の $su(2)$ 2 個が、各々 self–dual 及び anti–self–dual 方向に対応している。

最後にコメントをしておこう。(9) を見ると cos で書かれているので、一見負の値を取りそうに見える (action が負は許されない)。しかしそうではない。

curvature $\{F_{ij}\}$ の 写像としての像 (image) は、リー環 $u(1) = \sqrt{-1}\mathbf{R}$ なので、むしろ $F_{ij} = \sqrt{-1}G_{ij}$ と書くほうが適している。このとき (9) は

$$Y_{sd}^2 = (G_{12} - G_{34})^2 + (G_{13} + G_{24})^2 + (G_{14} - G_{23})^2 \geq 0, \tag{13}$$

$$Y_{asd}^2 = (G_{12} + G_{34})^2 + (G_{13} - G_{24})^2 + (G_{14} + G_{23})^2 \geq 0 \tag{14}$$

を用いて

$$\mathcal{A}_{FOS} = 4\cosh\left(g\frac{Y_{sd}}{2}\right)\cosh\left(g\frac{Y_{asd}}{2}\right) \tag{15}$$

と書き直される。確かに正であり問題はない。

同じことが以下の **non–abelian case(s)** にも言えるが、いちいちコメントしない。

3 Universal Yang–Mills Action : Non–Abelian Case

この章で、前章の結果を non–abelian case に拡張する。残念ながら一般のゲージ群 $G = SU(n)$ に対しては出来ていないので以下 $G = SU(2)$ に限定する、[6] を見よ。

求める action は (9) の形から

$$\mathcal{A}_{FOS} = 4\ \mathrm{tr}\cos\left(g\frac{X_{sd}}{2}\right)\cos\left(g\frac{X_{asd}}{2}\right) \tag{16}$$

と推測できる[2]。ここに

$$X_{sd}^2 = (F_{12} - F_{34})^2 + (F_{13} + F_{24})^2 + (F_{14} - F_{23})^2, \tag{17}$$

$$X_{asd}^2 = (F_{12} + F_{34})^2 + (F_{13} - F_{24})^2 + (F_{14} + F_{23})^2 \tag{18}$$

である。

そこで自然に次の疑問がわく。(16) を結果として与える curvature matrix は何か？ これはそんなにやさしい問題ではないことがわかる。

まず curvature をその成分を用いて

$$F_{ij} = F_{ij}^1\sigma_1 + F_{ij}^2\sigma_2 + F_{ij}^3\sigma_3\ :\ U \subset M \longrightarrow su(2) \tag{19}$$

と表す。ここに $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は Pauli 行列で

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

で与えられる。（以下に使う）Pauli 行列の重要な性質は

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbf{1}_2; \quad \{\sigma_1, \sigma_2\} = \{\sigma_1, \sigma_3\} = \{\sigma_2, \sigma_3\} = \mathbf{0}_2 \tag{21}$$

[2] 多分これ以外にはありえない

である。

最初の trial として (1) を参考に

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & \mathbf{0}_2 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & \mathbf{0}_2 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

とおいて見よう。

この章の計算を見通しよくするためには行列のベクトル表示

$$F_{ij} \longrightarrow \widehat{F}_{ij} = \begin{pmatrix} F_{ij}^1 \\ F_{ij}^2 \\ F_{ij}^3 \end{pmatrix} \tag{23}$$

が便利で、簡単のため

$$\mathbf{a} \equiv \widehat{F}_{12}, \quad \mathbf{b} \equiv \widehat{F}_{13}, \quad \mathbf{c} \equiv \widehat{F}_{14}, \quad \mathbf{d} \equiv \widehat{F}_{23}, \quad \mathbf{e} \equiv \widehat{F}_{24}, \quad \mathbf{f} \equiv \widehat{F}_{34} \tag{24}$$

とおく。

更に簡潔にするためいくつかの記号を準備しておく。3次元ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ に対して内積 (inner product), 外積 (exterior product) 及びスカラー3重積 (scalar triple product) を各々

$$\begin{aligned} &(\mathbf{xy}) \equiv \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}, \quad (\mathbf{xx}) \equiv \mathbf{x}^2, \quad (\mathbf{yy}) \equiv \mathbf{y}^2, \\ &[\mathbf{xy}] \equiv \mathbf{x}\wedge\mathbf{y}, \quad \text{etc}, \\ &|\mathbf{xyz}| \equiv (\mathbf{x}\,[\mathbf{yz}]) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\wedge\mathbf{z} = |\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}| \end{aligned}$$

とおこう（記号の混乱はないと思う）。

また以下の計算で使う有用な関係式を書いておく：

$$A = a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2 + a^3\sigma_3 \implies \mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)^T$$

に対して (21) より

$$\begin{aligned} A^2 &= \left\{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2\right\}\mathbf{1}_2 + a^1a^2\{\sigma_1,\sigma_2\} + a^1a^3\{\sigma_1,\sigma_3\} + a^2a^3\{\sigma_2,\sigma_3\} \\ &= \left\{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2\right\}\mathbf{1}_2 = \mathbf{a}^2\mathbf{1}_2 \end{aligned} \tag{25}$$

を得る[3]。これは spinor の典型的な特徴である。

試みに (22) を用いて $G = SU(2)$ に対する (non–abelian) universal Yang–Mills action を

$$\mathcal{A}_{FOS} \equiv \mathrm{Tr}\ \mathrm{e}^{g\mathcal{F}} \tag{26}$$

[3] $SU(n)$ $(n \geq 3)$ ではこのような関係式がない

とおいて見る。もちろん g は coupling constant である。

記号に関する注意をしておく。(22) の各成分 F_{ij} は、スカラーではなく行列なので混乱を避けるため (4) の tr ではなく大文字の Tr を用いた。

(26) の右辺を計算しよう。今度は abelian–case に比べて格段に難しくなる。
$g\mathcal{F}$ の固有方程式（多項式）は

$$\begin{aligned}
0 &= |\lambda \mathbf{1}_8 - g\mathcal{F}| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda\mathbf{1}_2 & -gF_{12} & -gF_{13} & -gF_{14} \\ gF_{12} & \lambda\mathbf{1}_2 & -gF_{23} & -gF_{24} \\ gF_{13} & gF_{23} & \lambda\mathbf{1}_2 & -gF_{34} \\ gF_{14} & gF_{24} & gF_{34} & \lambda\mathbf{1}_2 \end{vmatrix} \\
&= \left[\lambda^4 + g^2\left(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2+\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2\right)\lambda^2 - 2ig^3\left(|\mathbf{abd}|+|\mathbf{ace}|+|\mathbf{bcf}|+|\mathbf{def}|\right)\lambda + \right. \\
&\quad \left. g^4\mathrm{PF}(\mathcal{F})\right]^2 \qquad (27)
\end{aligned}$$

となる。ここに $\mathrm{PF}(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の Pfaffian で

$$\begin{aligned}
\mathrm{PF}(\mathcal{F}) &= \mathbf{a}^2\mathbf{f}^2+\mathbf{b}^2\mathbf{e}^2+\mathbf{c}^2\mathbf{d}^2 - 2\{(\mathbf{ab})(\mathbf{ef})-(\mathbf{af})(\mathbf{be})+(\mathbf{ae})(\mathbf{bf})-(\mathbf{ac})(\mathbf{df})+ \\
&\quad (\mathbf{af})(\mathbf{cd})-(\mathbf{ad})(\mathbf{cf})+(\mathbf{bc})(\mathbf{de})-(\mathbf{be})(\mathbf{cd})+(\mathbf{bd})(\mathbf{ce})\} \qquad (28)
\end{aligned}$$

で与えられる。詳しくは [6] の full–paper で与える。ここでは計算の過程で (25) が重要な役割を演じていることを注意しておく。

次に λ の項を無視して[4] $t=\lambda^2$ とおくと 2 次方程式

$$t^2 + g^2\left(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2+\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2\right)t + g^4\mathrm{PF}(\mathcal{F}) = 0$$

が得られる。判別式を計算しよう。

$$\begin{aligned}
D &= g^4\left(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2+\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2\right)^2 - 4g^4\mathrm{PF}(\mathcal{F})^2 \\
&= g^4\left\{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2+\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2+2\mathrm{PF}(\mathcal{F})\right\}\times \\
&\quad \left\{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2+\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2-2\mathrm{PF}(\mathcal{F})\right\}.
\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{sd}^2 &= \left\{(\mathbf{a}-\mathbf{f})^2+(\mathbf{b}+\mathbf{e})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{d})^2\right\}, \qquad (29) \\
\tilde{X}_{asd}^2 &= \left\{(\mathbf{a}+\mathbf{f})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{e})^2+(\mathbf{c}+\mathbf{d})^2\right\} \qquad (30)
\end{aligned}$$

とおき

$$\tilde{X}_{sd}^2\tilde{X}_{asd}^2 = \left\{(\mathbf{a}-\mathbf{f})^2+(\mathbf{b}+\mathbf{e})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{d})^2\right\}\left\{(\mathbf{a}+\mathbf{f})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{e})^2+(\mathbf{c}+\mathbf{d})^2\right\}$$

[4] 4 次方程式に対する Ferrari 又は Euler の公式を用いて（例えば [8] を見よ）形式的に (27) を解くことが出来る

を考える。D と $g^4\tilde{X}_{sd}^2\tilde{X}_{asd}^2$ の差を知りたいので、（長い）計算を実行すると

$$\begin{aligned} D - g^4\tilde{X}_{sd}^2\tilde{X}_{asd}^2 &= -4g^4\left[([\mathbf{af}]-[\mathbf{be}]+[\mathbf{cd}])^2\right. \\ &\qquad \left. -4\left\{([\mathbf{ab}][\mathbf{ef}])-([\mathbf{ac}][\mathbf{df}])+([\mathbf{bc}][\mathbf{de}])\right\}\right] \end{aligned} \tag{31}$$

を得る。面白いことにすべて外積を用いて書けている。従って外積項を無視すれば

$$D = g^4\tilde{X}_{sd}^2\tilde{X}_{asd}^2 \quad \text{mod } \{\text{Exterior Products}\} \tag{32}$$

となる。

ところで上で無視した λ の項は外積項を含むのでもちろん

$$|\mathbf{abd}|+|\mathbf{ace}|+|\mathbf{bcf}|+|\mathbf{def}| = 0 \quad \text{mod } \{\text{Exterior Products}\}$$

となり、（条件付）固有方程式

$$0 = |\lambda \mathbf{1}_8 - g\mathcal{F}| \quad \text{mod } \{\text{Exterior Products}\} \tag{33}$$

は

$$t^2 + g^2\frac{\tilde{X}_{sd}^2+\tilde{X}_{asd}^2}{2}t + g^4\frac{(\tilde{X}_{asd}^2-\tilde{X}_{asd}^2)^2}{16} = 0$$

に帰着され、これを解いて

$$t_\pm = -\frac{g^2}{4}\left(\tilde{X}_{sd}\mp\tilde{X}_{asd}\right)^2$$

を得る。$\lambda^2 = t$ より

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\frac{g}{2}(\tilde{X}_{sd}+\tilde{X}_{asd}), \quad \lambda_2 = -i\frac{g}{2}(\tilde{X}_{sd}+\tilde{X}_{asd}), \\ \lambda_3 &= i\frac{g}{2}(\tilde{X}_{sd}-\tilde{X}_{asd}), \quad \lambda_4 = -i\frac{g}{2}(\tilde{X}_{sd}-\tilde{X}_{asd}). \end{aligned} \tag{34}$$

(27) より解はすべて重根だから $\{\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_4\}$ となる。

以上のもとで求める結果を得る：

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{FOS} &\equiv \text{Tr e}^{g\mathcal{F}} \quad \text{mod } \{\text{Exterior Products}\} \\ &= 2\left(\mathrm{e}^{\lambda_1}+\mathrm{e}^{\lambda_2}+\mathrm{e}^{\lambda_4}+\mathrm{e}^{\lambda_4}\right) \\ &= 8\cos\left(g\frac{\tilde{X}_{sd}}{2}\right)\cos\left(g\frac{\tilde{X}_{asd}}{2}\right) \\ &= 4\,\mathrm{tr}\cos\left(g\frac{X_{sd}}{2}\right)\cos\left(g\frac{X_{asd}}{2}\right). \end{aligned} \tag{35}$$

ここでコメントをしておこう。我々が用いた方法とトポロジーのある定理が良く似ていることを以下に指摘しておく。

M の first homology group $H_1(M,\mathbf{Z})$ はアーベル群で、他方 first homotopy group (fundamental group) $\pi_1(M)$ は一般に非アーベル群である。両者には有名な関係式

$$H_1(M,\mathbf{Z}) \cong \pi_1(M)/[\pi_1(M),\pi_1(M)] = \pi_1(M) \bmod [\pi_1(M),\pi_1(M)]$$

が成り立つ。ここに $[\pi_1(M),\pi_1(M)]$ は $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in \pi_1(M)\}$ によって生成される commutator subgroup である。例えば [1] を見よ。要するに $H_1(M,\mathbf{Z})$ は $\pi_1(M)$ のアーベル化である。

この commutator subgroup が我々の外積項に対応する。我々の方法は外積を含む（複雑な）項をすべて切り捨て、残りの（比較的単純で本質的な）項のみを取り出す**ある種のアーベル化**である。

その手法は代数的なもので、その幾何学的意味付けに興味がある。それは [6] の full-paper の中で議論する。

我々の結果はゲージ群 $SU(2)$ に限定されており十分とは言えない。$SU(n)$ $(n \geq 3)$ に対しても当然

$$\mathcal{A}_{FOS} = 4\ \mathrm{tr}\cos\left(g\frac{X_{sd}}{2}\right)\cos\left(g\frac{X_{asd}}{2}\right)$$

with

$$\begin{aligned} F_{ij} &: U \subset M \longrightarrow su(n), \\ X_{sd}^2 &= (F_{12}-F_{34})^2 + (F_{13}+F_{24})^2 + (F_{14}-F_{23})^2, \\ X_{asd}^2 &= (F_{12}+F_{34})^2 + (F_{13}-F_{24})^2 + (F_{14}+F_{23})^2 \end{aligned}$$

が成り立つべきである。

しかし $SU(2)$ の場合の証明には (25) が本質的に使われており、この関係式は $SU(n)$ $(n \geq 3)$ では成り立たない。一般の場合には証明法を変更する必要があるかもしれない。読者に challenging problem として残しておく。

更に我々の考え方や手法は最近の non-commutative Yang-Mills theory (例えば [9], [10] を見よ) にも適用できるはずである。しかしこの論文の scope を超えているので省略する。再び読者に challenging problem として残しておく。

4 藤井の独り言

我々は何故４次元時空に住んでいるのであろう。５次元ではなく、３次元でもなく何故４次元なのであろうか。最終理論は（それがもしあるなら）この問題に明確な回答を与えなければならない。逆にこの問題に答えられない理論は、決して最終理論ではありえない。

我々人類はこの４次元時空に生を受け、やがて滅んでゆく。そのときまでにこの問題に明解に答えなければならないのである。人類はこの問題に答えて滅んでゆける最初の生物になれる可能性がある。

しかし最終理論を気長に待っている暇はないので、4次元と関連がありそうな現象や性質を知っている範囲で列挙してゆく。やがてそれらの総和として、**もはや時空は4次元以外ありえないのだ** と持って行きたいのである。"現象論"的アプローチとしては、こんなものであろう。少し列挙してみよう。

物理的には

1. スピノール(フェルミオン)が非自明な繰り込み可能な相互作用(ゲージ相互作用、湯川相互作用)ができる最大の次元である。
2. ゲージ理論が漸近自由な最大の次元である。
3. ゲージ場が繰り込み可能な最大の次元である。
4. 重力がスピン2の粒子(グラビトン)として現れる最小の次元である。
5. 自由に飛んでいる弦同士がぶつからない最小の次元である。

等である[5]。 正直に言ってよくわからない。

数学的には

1. $so(4) \cong su(2) \otimes su(2)$ のような分解が成り立つ最小の次元である。
2. Jones index が実数となる最小の数である。
3. 代数方程式が代数的に解ける最大の次数である。
4. 国境が異なる色で塗れる最小の数である（四色問題)。

等である。2, 3 及び 4 は時空の次元とどのように関連しているのであろうか?

生物学的には

1. DNA は4文字 {A, T, C, G} のみで生成されている。

が特に重要である。この4文字は、時空の次元（4次元）を本質的に反映しているのであろうか？もし6次元時空で生命が存在出来れば、DNA は4文字なのであろうか？ それとも6文字なのであろうか？ それとも····。非常に興味のあるところである。

化学に関しては、残念ながらそのような知識を持ち合わせていない。

我々はいつかこの根源的問題に答えなければならない。人類の意地にかけても。

参考文献

[1] M. Nakahara : Geometry, Topology and Physics, IOP Publishing Ltd, 1990.

[5]野尻伸一氏に教えてもらった

[2] C. N. Yang and R. L. Mills : Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Phys. Rev. 96 (1954), 191.

[3] M. Ikeda and Y. Miyachi : On an extended framework for the description of elementary particles, Prog. Theor. Phys. 16 (1956), 537.

[4] T. T. Wu and C. N. Yang : Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields, Phys. Rev. D 12 (1975), 3845.

[5] M. Born and L. Infeld : Foundations of the new field theory, Proc. Royal Soc. (London), A 144 (1934), 425.

[6] K. Fujii, H. Oike and T. Suzuki : Universal Yang–Mills Action on Four Dimensional Manifolds, hep-th/0602204.

[7] T. Suzuki : in preparation.

[8] K. Fujii : A Modern Introduction to Cardano and Ferrari Formulas in the Algebraic Equations, quant-ph/0311102.

[9] A. Connes : Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.

[10] N. A. Nekrasov : Noncommutative Instantons Revisited, Commun. Math. Phys. 241 (2003) 143, hep-th/0010017.